Mardi 16 juillet 2019

Problème 1. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous les entiers a et b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problème 2. Soit A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC. Soit également P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point, situé sur la droite (PB_1), tel que B_1 se retrouve strictement entre P et P_1, et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. De même, soit Q_1 un point, situé sur la droite (QA_1), tel que A_1 se retrouve strictement entre Q et Q_1, et tel que $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$.

Démontrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Problème 3. Un réseau social compte 2019 membres. Certains de ces membres sont amis l'un avec l'autre, la relation d'amitié étant réciproque. Des événements du type décrit ci-dessous surviennent successivement, l'un après l'autre :

> Soit A, B et C trois membres tels que A soit ami avec B et C, mais que B et C ne soient pas amis ; alors B et C deviennent amis, mais A n'est plus ami ni avec B, ni avec C. Les autres relations d'amitié entre membres ne changent pas durant cet événement.

Initialement, 1010 membres ont 1009 amis chacun, et 1009 membres ont 1010 amis chacun. Démontrer qu'il existe une suite de tels événements à la suite desquels chaque membre aura au plus un ami.