Mercredi 17 juillet 2019

Problème 4. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (k, n) tels que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problème 5. La banque de Bath a émis des pièces dont une face est marquée de la lettre H et l'autre face est marquée de la lettre T. Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Morgane retourne la $k^{\text{ème}}$ pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, elle s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration THT sera

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations.

(a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opérations que va réaliser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, $L(THT) = 3$ et $L(TTT) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $AB \neq AC$. On note ω le cercle inscrit dans ABC, I le centre de ω, et D, E et F les points de tangence respectifs de ω avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit R le point de ω, autre que D, tel que la droite (DR) soit perpendiculaire à (EF). Soit P le point d'intersection, autre que R, entre la droite (AR) et le cercle ω. Enfin, soit Q le point d'intersection, autre que P, entre les cercles circonscrits à PCE et à PBF.

Démontrer que les droites (DI) et (PQ) sont sécantes en un point appartenant à la perpendiculaire à (AI) passant par A.